Browder-Livesay Invariantの拡張について (PL多様体及び位相多様体)

数理解析研究所講究録
127巻 1971年 43-47

BROWDER－LIVESAY INVARIANTの拡張について

東大 理 松元重則

§1. 序ならびに定義

Browder－Livesay は、球面上の free involution の desuspension の問題を、ある invariant を考える事によって解決した。Santiago López de Medrano は、彼の These にて、上の結果の best possible である事を示した。

ここでは、彼等の結果を球面上の free involution から、一般の compact 多様体 (simply－connected or not) に拡張する。

Y を、connected closed manifold とし、n で、その次元を表わす。$w: \pi_1(Y) \to \{\pm\}$ を、1次元 Stiefel－Whitney 類とする。Y の基本類を $[Y] \in H_n^t(Y; \mathbb{Z})$ で表示する。($H_n^t(Y; \ )$ に関しては、Wall "Surgery of compact mfds" をみよ。)

S を、Y 上の与えられた free $\mathbb{Z}_2$－action とし、

次を、終始、仮定する。

[仮定] Yの base point y_0 と Sy_0 を結ぶ path (の homotopy class) l が、一つ与えられていて、$S_l \circ l = 1 \in \pi_1(Y, y_0)$ である。

この時、l を用いる事によって、define された $S_\#: \pi_1(Y) \to \pi_1(Y)$ は、involution である。

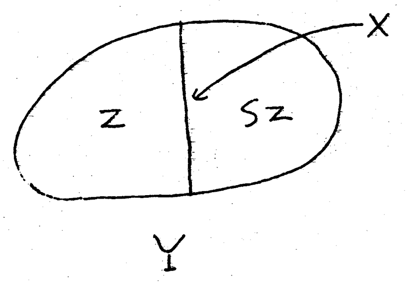
次に、(S, Y) の signature $\varepsilon(S, Y)$ を

$$\varepsilon(S, Y) = \pm \iff S_*[Y] = \pm[Y]$$ (複号同順) にて define する。ここに、$S_*: H_n^{+}(Y; \mathbb{Z}) \to H_n^{+}(Y; \mathbb{Z})$ である。

(例) Y として S^n をとり、involution として standard なものをとれば、$\varepsilon(S, Y) = (-1)^{n-1}$ である。

さて、(S, Y) に対し、我々は、triple (T, N, ϕ) を考える。ここに、N は n-dim. closed manifold で T は、その上の free involution である。ϕ は N から Y への simple homotopy equivalence で、$\phi T x = S \phi x$ $(\forall x \in N)$ を満足するものとする。

次に X^{n-1} を、(S, Y) の characteristic submfd. とせよ。すなわち、ある compact submanifold Z^n of Y が存在して、$\partial Z = X$ かつ $Z \cup SZ = Y$、$Z \cap SZ = X$ とする。(次図参照)



[定義]　$\phi:(T,N)\to(S,Y)$ が、<u>s-regular on X</u> とは、

1) ϕ は differentiable 又は PL map（我々の使っている category によって）かつ transverse regular on X

2) $\phi|\phi^{-1}(X): \phi^{-1}(X)\to X$ は、simple h.e.

であるとする。

（注意）$\phi^{-1}(X)$ は、(T,N) の characteristic submfd である。

我々は、$\phi:(T,N)\to(S,Y)$ を equivariant（$\mathbb{Z}_2$-action に関して）homotopy で動かし、s-regular on X と、なさしめ得るか、否かという問題を考える。

§.2　結果

我々は、上の問題を、次の補足的仮定のもとで考える。

[補足的仮定] Yの次元($=n$)を6以上であるとし、characteristic submfd. Xは、連結かつ、$\pi_2(Z, X) = \pi_1(Z, X) = 0$を満足するとする。ここに、$Z$とは、$X$をboundする$Y$のsubmanifoldであった。

我々の結果は、次の通りである。

[定理] finitely presented group πと、homomorphism $w: \pi \to \{\pm\}$と、πのinvolution $\mathcal{S}$と、符号ε(+か−)と、自然数nとによって定まるabelian群

$$BL_n(\pi, w; \mathcal{S}, \varepsilon)$$

がdefineされる。そして、simple h.e. ($\mathbb{Z}_2$−equivariant) $\phi: (T, N) \longrightarrow (S, Y)$の$\mathbb{Z}_2$-equivariant homotopy classにのみよって定まるinvariant

$$\sigma(\phi) \in BL_n(\pi_1(Y), w; S_\#, \varepsilon(S, Y))$$

がdefineされる。そして$\sigma(\phi) = 0$は、次と同値である。

上の[補足的仮定]を満たす任意のcharacteristic submanifold Xに対し、ϕは、その$\mathbb{Z}_2$-equivariant homotopy class内に、Xにs-regularなものを含む。

上で定義したobstruction group $BL_n(\cdots)$が大きすぎないことは、次によって知られている。

[定理 2] σ を $BL_{n+1}(\pi_1(Y), w; S_\#, \epsilon(S, Y))$ の任意の元とする時、compact mfd triad

$$(Y \times I, Y \times \{0\}, Y \times \{1\})$$

~~井号~~ と、その上の free involution T 並びに equivariant simple h.e. (of triads)

$$\phi : (Y \times I, Y \times \{0\}, Y \times \{1\}) \longrightarrow (\text{自分自身})$$

が存在して、$\sigma(\phi) = \phi$ である。

(注意 1) 我々は、invariant σ を、closed mfd の場合にしか定義しなかったが、[定理 1] は、容易に、boundary つきの多様体の ~~fixed~~ boundary を fix した case に、拡張される。 上の[定理 2] は、この拡張に関してである。

(注意 2) [定理 1] は $\dim Y \geq 6$ の場合に成立した。しかし、[定理 2] は $\dim(Y \times I) = 6$ の場合は だめ。